CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES
Programme T' 1982

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PREMIER PROBLÈME

On désigne par $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de variable réelle, à coefficients réels ou complexes. On suppose que la suite (na_n) est bornée.

1. *a.* Prouver que cette série converge pour $x \in [0, 1[$. On note f sa somme et R_n le reste d'ordre n : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

b. On pose : $\lambda_n = \sup_{k \geqslant n+1} (k \mid a_k \mid)$ et $\varphi_n(x) = \int_0^x \frac{t^n\, dt}{1-t}$.

Démontrer : $\forall\, x \in [0, 1[,\ \mid R_n(x) \mid \leqslant \lambda_n \varphi_n(x)$.

c. On note : $\sigma_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Prouver : $\forall\, x \in [0, 1[,\ \mid f(x) - \sigma_n \mid \leqslant (1-x)[\, \mid a_1 \mid + 2 \mid a_2 \mid + \ldots + n \mid a_n \mid\,] + \lambda_n \varphi_n(x)$.

2. *a.* En utilisant le changement de variable, $t = 1 - \frac{u}{n}$, démontrer que la suite $\left(\varphi_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ est croissante et majorée par $\frac{1}{e}$. En déduire pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ un majorant de $\left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sigma_n \right|$.

b. Cette question n'est pas nécessaire pour la suite du problème.

Démontrer : $\forall\, u \in [0, n],\ 1 + \frac{u}{n} \leqslant e^{\frac{u}{n}}$ et $\left(1 - \frac{u^2}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^n$.

En déduire : $\forall\, u \in [0, n],\ 0 \leqslant e^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leqslant \frac{u^2 e^{-u}}{n}$.

Prouver : $\lim_n \varphi_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \int_1^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{du}{u}$.

.../...

3. On suppose dorénavant : $\lim_n (n \mid a_n \mid) = 0$.

a. Prouver : $\lim_n \left(\frac{\mid a_1 \mid + 2 \mid a_2 \mid + \ldots + n \mid a_n \mid}{n} \right) = 0$.

b. On note $N(x)$ la partie entière de $\frac{1}{1-x}$.

Prouver : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \mid f(x) - \sigma_{N(x)} \mid = 0$.

c. On se place dans le cas où $\lim_n (\sigma_n) = L$. Démontrer : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = L$.

4. On s'intéresse à titre d'exemple à la série entière :

(1) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$$

a. Calculer le rayon de convergence et la somme f de cette série.

b. On note $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Calculer la limite L de la suite (σ_n) et la partie principale de $L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

c. La série dérivée de la série (1) est-elle convergente pour $x = 1$? On note f' la somme de cette série. Calculer la partie principale de :

$$\frac{1}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \ldots + \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

et celle de $f'\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel noté $(x \mid y)$, et une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, antisymétrique, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$.

1. On suppose $n \geqslant 2$.

a. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b. Décrire la matrice de f dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
L'ensemble des endomorphismes antisymétriques de $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel; donner sa dimension.

.../...

2. *a.* Prouver que, si f est inversible, alors $\mathbb{R}^n$ est de dimension paire.

b. Plus généralement, prouver que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires et orthogonaux, et que le rang de f est pair.

3. *a.* Prouver que f^2 est un endomorphisme symétrique et que les valeurs propres de f^2 sont toutes négatives ou nulles.

b. On pose $P(x) = \text{dét}\,(xI - f)$ et $Q(x) = \text{dét}\,(xI - f^2)$ où I est l'application identité de $\mathbb{R}^n$. Prouver : $[P(x)]^2 = Q(x^2)$. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de f ?

4. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2.

a. Prouver que le sous espace vectoriel propre de f^2 associé à λ, $V(\lambda)$, est stable par f, et qu'il admet une base orthogonale de la forme

$$(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots, e_p, f(e_p)).$$

b. En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f soit, dans cette base, de la forme :

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{matrix} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

dans laquelle les $(\alpha_i)_{i \in [i,\, s]}$ sont tous non nuls, et le dernier bloc carré diagonal est d'ordre $(n - 2s) \geqslant 0$.

5. Soit le système d'équations différentielles de la variable t :

$$(S) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - u - 4 \cos \sqrt{10}\, t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2z + 2 \sin \sqrt{10}\, t \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y - 2u + 2 \cos \sqrt{10}\, t \\ \dfrac{du}{dt} = x + 2z \end{cases}$$

a. Donner, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice A de l'endomorphisme antisymétrique associé à ce système. Comparer A^2 et A^4.

b. Diagonaliser A^2 dans une base orthonormée. (On cherchera des vecteurs de base ayant deux coordonnées nulles dans la base canonique.)

c. Résoudre le système différentiel (S) lorsque les conditions initiales sont :

$$x(0) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,; \quad y(0) = 0\,; \quad z(0) = \frac{4}{\sqrt{5}}\,; \quad u(0) = 0.$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail